Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
GABRIELA-ROXANA BONDOC, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,
DANIEL STRETCU, VLAD LUNGU, LEONARD GIUGIUC,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, ELENA RÎMNICEANU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2019-2020

Editura Paralela 45

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

CUPRINS

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Argeș

9.O.1. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$, astfel încât $x \cdot y \cdot z = 27$.

a) Arătați că $\sqrt{x} + \sqrt{3y} + \sqrt{5z} \leq x + y + z$.

b) Precizați dacă există numere reale pozitive x, y, z care verifică egalitatea:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}+2y+5z} + \frac{y^2}{\sqrt{3y}+3z+7x} + \frac{z^2}{\sqrt{5z}+x+6y} = 1.$$

9.O.2. Fie șirul crescător $x_n \in [0, \infty)$, cu $x_0 = 0$ și $x_1 = a$, care verifică relația: $x_{n+1} = a - x_n + 2\sqrt{x_n x_{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Arătați că $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a^2 + 4a\sqrt{x_k x_{k-1}}}$.

9.O.3. Fie $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului ABC.

a) Calculați, în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, vectorul $\vec{v} = a^2\overrightarrow{AA'} + b^2\overrightarrow{BB'} + c^2\overrightarrow{CC'}$, cu notațiile obișnuite în triunghiul ABC.

b) Dacă a, b, c sunt numere pozitive în progresie aritmetică, atunci $\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC}$.

9.O.4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2+31x} + \sqrt{x+31} = x + \sqrt{x} + 8$.

Dan Nedeianu, *Gazeta Matematică* nr. 11/2019

Bihor

9.O.5. Determinați funcțiile $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \ldots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

9.O.6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2+31x} + \sqrt{x+31} = x + \sqrt{x} + 8$.

Dan Nedeianu, *Gazeta Matematică* nr. 11/2019

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

9.O.7. Fie rombul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine dreptei AC dacă şi numai dacă $AM + DP = BN$.

9.O.8. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.

a) Demonstraţi că $\dfrac{x-y}{xy+2z}+\dfrac{y-z}{yz+2x}+\dfrac{z-x}{zx+2y}=0$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x}{xy+2z}+\dfrac{y}{yz+2x}+\dfrac{z}{zx+2y}\geq\dfrac{9}{8}$.

Brașov

9.O.9. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, m număr par. Demonstraţi că dacă $\sqrt{2} < \dfrac{m}{n}$, atunci $\sqrt{2}<\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{mn}$.

b) Fie $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\sqrt{2} < a$. Demonstraţi că există $a' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} < a' < a$.

Romeo Ilie

9.O.10. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5$. Prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

Ioana Mașca

9.O.11. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două. Demonstraţi că dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{n^2+n+2k}{2}$, atunci printre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ există $n - k$ numere naturale consecutive.

Romeo Ilie

9.O.12. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv BCD. Fie L mijlocul laturii AB. Ştiind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL, arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel.

Brăila

9.O.13. Fie $ABCDE$ un pentagon convex şi punctele $P \in (DE)$, $Q \in (CD)$, astfel încât $\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{QC}{QD}=2$. Dacă M şi N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi ABE, arătaţi că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

Traian Tămâian

9.O.14. Fie a_n al n-lea număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $a_n > 3n$, $\forall\, n \geq 12$.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 198$.

9.O.15. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\dfrac{6x+7}{10}\right]-\left\{\dfrac{3x+11}{5}\right\}=\dfrac{x+1}{5}$. (S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x şi cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.)

Nicolae Stănică

9.O.16. Se consideră punctul M în interiorul triunghiului ABC. Se notează $AM \cap BC = \{D\}$, $BM \cap AC = \{E\}$, $CM \cap AB = \{F\}$. Determinaţi poziţia punctului M pentru care produsul $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF}$ este minim.

Libris.ro Respect pentru oameni și cărți

Nazeli Boicescu

București

9.O.17. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{4n+1} + \sqrt{9n+13}$ este număr raţional.

Valentin Nicula

9.O.18. Fie numerele reale a şi b cu proprietatea $[|a+b|] < 4$. Arătaţi că $[ab] < 4$. (Pentru a real se notează $[a]$ partea întreagă a lui a şi $|a|$ modulul lui a.)

Mircea Țeca

9.O.19. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $x^2 - y! = 2019$. (Pentru n natural nenul se notează $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, iar $0! = 1$.)

Costin Negrii, *Gazeta Matematică* nr. 10/2019

9.O.20. În pătratul $ABCD$, fie $M \in AC$. Paralela prin M la AD intersectează BD în N, paralela prin N la DC intersectează AC în P, iar paralela prin P la BC intersectează DB în Q. Punctele O_1, O_2, O_3 şi O_4 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAB, NAB, PCB, respectiv NBC. Demonstraţi că $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$.

Petre Simion și Cristian Ciobănescu

Caraș-Severin

9.O.21. Fie $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 1$. Arătaţi că $\frac{a^2}{a^3+5} + \frac{b^2}{b^3+5} + \frac{c^2}{c^3+5} \leq \frac{1}{4}$.

9.O.22. a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_9, ştiind că $S_3 = 40$ şi $S_6 = 60$.

b) Calculaţi suma elementelor mulţimii $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\frac{2x+3}{4}\right] = 1 + \{2x\} \right\}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a.

9.O.23. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 3$ şi punctele P, Q, G, R, S, astfel încât:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC},\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},\ \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RG} \text{ şi } \overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{SC}.$$

a) Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

b) Arătaţi că există un număr raţional r pentru care punctele B, R, S sunt coliniare.

9.O.24. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ şi O intersecţia diagonalelor sale, $a > 0$ şi $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$.

a) Dacă $a = 1$, atunci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$.

b) Dacă $a \neq 1$ şi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Cluj

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

9.O.25. Rezolvați ecuația $\left[\frac{2x+3}{x-1}\right]+\left\{\frac{2x+1}{x-2}\right\}=\frac{13}{9}$.

Camelia Maria Chindriș și Corina Livia Dragoș

9.O.26. Demonstrați că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, astfel încât $a+b+c=1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$. În ce condiții are loc egalitatea?

Anca Cristina Hodorogea

9.O.27. Arătați că ecuația $(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+2019)^2=y^2$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Eugen Jecan

9.O.28. Se consideră triunghiul ABC, iar D, E și F punctele în care bisectoarele unghiurilor BAC, ABC și, respectiv, ACB intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Arătați că dacă $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Camelia Maria Chindriș și Corina Livia Dragoș

Constanța

9.O.29. Determinați $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $[x^2]\cdot\{1+x^2\}=x^2-1$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului a.

9.O.30. Fie $a, b, c\in[1,+\infty)$. Arătați că $\frac{a}{a+2\sqrt{b}+c}+\frac{b}{b+2\sqrt{c}+a}+\frac{c}{c+2\sqrt{a}+b}\geq\frac{3}{4}$.

Alexandru Cărnaru

9.O.31. Fie a, b, $c\in\mathbb{Q}^*$. Arătați că tripletul $\left(c,\ a+b,\ 2c+\frac{ab}{c}\right)$ nu poate forma o progresie geometrică.

Nelu Chichirim

9.O.32. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$, $ACFG$ și $BCHI$. Arătați că:

a) dacă M este ales astfel încât $BIMD$ să fie paralelogram, atunci $BMAG$ este paralelogram;

b) triunghiurile ABC și DGH au același centru de greutate;

c) cu segmentele CD, AH și BG se poate construi un triunghi.

Cătălin Zîrnă

Covasna

9.O.33. Rezolvați ecuația $\left[\frac{x^2+x}{2}+2019\right]=|x+2020|$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a și $|a|$ modulul său.

9.O.34. Arătați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\sqrt{2020^n-2021}$ nu este natural.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

9.O.35. Demonstraţi următoarele inegalităţi:

a) $\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{a^3}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\forall\, a, b\in\mathbb{R}_+^*$.

b) $\frac{x^{2020}+y^{2020}}{z^{3030}}+\frac{y^{2020}+z^{2020}}{x^{3030}}+\frac{z^{2020}+x^{2020}}{y^{3030}}\geq 2\left(\frac{1}{x^{1010}}+\frac{1}{y^{1010}}+\frac{1}{z^{1010}}\right)$, $\forall\, x, y, z\in\mathbb{R}^*$.

9.O.36. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, respectiv ACE. Arătaţi că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

Dâmbovița

9.O.37. Fie $ABCDE$ un pentagon convex, $P\in(DE)$, $Q\in(CD)$, astfel încât $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$ şi fie M, N centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABE. Demonstraţi că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

9.O.38. Demonstraţi că, pentru orice $x, y, z\in(0,\infty)$, avem:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right)\geq 9.$$

9.O.39. Demonstraţi că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nu pot fi termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei aceleiaşi progresii aritmetice.

9.O.40. Demonstraţi că, pentru orice număr natural $n\geq 2$, avem $\frac{1}{n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1$.

Dolj

9.O.41. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale, astfel încât $a_1=1$.

a) Arătaţi că există $k>1$, astfel încât a_k să fie pătrat perfect.

b) Arătaţi că progresia conţine o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.

c) Daţi un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conţine niciun pătrat perfect.

9.O.42. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{4}$ şi $\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}=\frac{2}{n^2+2n}$, $n\geq 1$. Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x_k<1\text{, oricare ar fi } n\geq 1.$$

Traian Tămâian, *Gazeta Matematică* nr. 11/2019

9.O.43. Fie $x, y, z>0$. Demonstraţi că $\frac{x^3+3}{y+z}+\frac{y^3+3}{z+x}+\frac{z^3+3}{x+y}\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{x+y+z+1}{x+y+z}$.

Cătălin Cristea

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

9.O.44. Fie ABC un triunghi, D piciorul înălţimii din A, G centrul de greutate al triunghiului ABC şi S piciorul bisectoarei din D în triunghiul ADB. Dreapta SG taie latura AC în punctul T. Arătaţi că $AD = BC$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, *Gazeta Matematică* nr. 9/2019

Galați

9.O.45. Fie $a, b, c > 0$. Demonstraţi că:

a) $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3 \cdot a \cdot b \cdot c$;

c) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

Vasile Popa

9.O.46. a) Demonstraţi că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $[a] = [b]$, atunci $|a - b| < 1$.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=\left[\dfrac{x+1}{3}\right]$.

Vasile Popa

9.O.47. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \dfrac{1}{4}$ şi $\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}=\dfrac{2}{n^2+2\cdot n}$, $n \geq 1$. Arătaţi că:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot x_k < 1,\ \forall\ n \geq 1.$$

(S-a notat $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot x_k = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + .. + (2n + 1) \cdot x_n$.)

9.O.48. a) Fie punctele O, A, B, C, iar A, B, C distincte două câte două. Arătaţi că punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OB}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{OC}$.

b) Considerăm punctele A, B, C, A', B', C' în acelaşi plan. Arătaţi că suma vectorilor $\overrightarrow{MN}$, cu $M \in \{A, B, C\}$ şi $N \in \{A', B', C'\}$, este nulă dacă şi numai dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

Iași

9.O.49. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat prin $\dfrac{a_1}{0!}+\dfrac{a_2}{1!}+\dfrac{a_3}{2!}+\ldots+\dfrac{a_n}{(n-1)!}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, iar $0! = 1$.

a) Determinaţi termenul general a_n.

b) Demonstraţi că $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k} < 1$.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

9.O.50. Se consideră pentagonul $ABCDE$ înscris în cercul de centru O, cu $AD \perp BE$. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, respectiv ACE, arătați că $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.

9.O.51. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $\{x\} + \left\{x+\frac{1}{3}\right\} + \left\{x+\frac{2}{3}\right\} = [x]^2$, unde $\{y\}$ reprezintă partea fracționară, iar $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real y.

9.O.52. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c care verifică relația $ab + ac + bc = abc$.

a) Demonstrați că $a + b + c \geq 9$.

b) Demonstrați că $(a + b + c)\sqrt{9+a+b+c} \geq 3\sqrt{6abc}$.

Ilfov

9.O.53. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. Calculați $S = f(2) + f(2^2) + ... + f(2^9)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$(2x + 1) + (2x + 5) + (2x + 9) + ... + (2x + 37) = 210.$$

9.O.54. Folosind metoda inducției matematice, arătați că $(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) \,\vdots\, 19, \forall n \in \mathbb{N}$.

9.O.55. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 4$ și $AD = 3$.

a) Demonstrați că pentru orice punct M din planul dreptunghiului are loc egalitatea:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

b) Calculați modulul vectorului $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

9.O.56. Fie predicatele: $p(x, y) : |x| < 1$ și $|y| < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $q(x, y) : \frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $xy \neq -1$.

a) Aflați valoarea de adevăr a propoziției $q(4, 3)$.

b) Demonstrați că $p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$.

c) Aflați valoarea de adevăr a propoziției: dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$, atunci $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Maramureș

9.O.57. a) Arătați că $2x^4 \geq x^3 + 1$, $\forall x \geq 1$.

b) Arătați că dacă $a, b, c \in [1, \infty)$, atunci $\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2a^2b^2c^2}$.

Radu Pop

9.O.58. Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b^2 - 4ac \geq 0$. Arătați că cel puțin una dintre ecuațiile $[a]x^2 + [b]x + [c] = 0$, $\{a\}x^2 + \{b\}x + \{c\} = 0$ are rădăcini reale, unde $[a]$, $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Nicolae Mușuroia

9.O.59. Fie M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile (BC), (CA), respectiv (AB). Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{a+b-c}{2a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{a+c-b}{2a} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) dacă $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

9.O.60. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de centru O. Ştiind că $[AB] \equiv [CD] \equiv [EF]$ şi $[BC] \equiv [DE] \equiv [FA]$, arătaţi că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Mihaela Ghiță și Traian Preda, *Gazeta Matematică* nr. 1/2020

Mehedinți

9.O.61. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră $A = \sqrt{3^{n-4} + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n}$.

a) Arătaţi că pentru orice n impar, $A \notin \mathbb{Q}$.

b) Dacă $p \in \mathbb{N}$ este dat, determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A = 11 \cdot 9^p$.

9.O.62. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Se ştie că $\exists\, u < v$, $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(u) \cdot f(v) < 0$.

a) Arătaţi că $a \neq 0$.

b) Arătaţi că $\exists\, t$, $t \in (u, v)$, astfel încât $f(t) = 0$.

9.O.63. Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea $x + y + z = 1$. Arătaţi că:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 10(xy + xz + yz) - 3.$$

În ce caz are loc egalitatea?

9.O.64. În triunghiul ABC considerăm $D \in [AB]$, $E \in [BC]$, $F \in [CA]$, astfel încât $AD = \alpha DB$, $BE = \alpha EC$, $CF = \alpha FA$, unde α este un număr real pozitiv. Dacă M, N, P sunt puncte în planul (ABC) cu proprietatea $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{FP} = \vec{0}$, demonstraţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

Prahova

9.O.65. a) Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in (0, \infty)$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

b) Determinaţi numerele reale pozitive x, y, z, t care verifică relaţia:

$$\frac{2xy + 3x + 6y}{x^2 + 4y^2 + 9} = \frac{(2y+z)^2}{2z+1} + \frac{(2z+1)^2}{2y+t} + \frac{(y+t)^2}{y+z} - 3(y+z) - t.$$

Gabriel Necula

9.O.66. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \left[\sqrt{n^2 - 5n + 10}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că $a_1 + a_2 + \ldots a_n = 2025$.

Octavian Purcaru

Libris.ro Respect pentru oameni și cărți